MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

G. L. Hetyei

# ANNEAUX DE COHEN-MACAULAY DEFINIS PAR DES MATROIDES

Preprint, No.47/1989.

BUDAPEST
REÁLTANODA U. 13–15.
H–1053

SKV – 84-5115-09

# ANNEAUX DE COHEN-MACAULAY DEFINIS PAR DES MATROIDES

Par G.L.Hetyei

## INTRODUCTION

Cet essai se compose de deux parties. Dans la première partie nous allons voir une nouvelle démonstration du théorème de Reisner qui caractérise les complexes simpliciaux dont l'anneau des faces est Cohen-Macaulay. Elle n'utilise pas la réduction mod.p et les morphismes de Frobenius, comme la démonstration originelle dans [2], mais traduit directement la condition Cohen-Macaulay pour tous les localisés de l'anneau des faces par des idéaux maximaux. Pour faire ceci on passe à travers une caractérisation algébrique, formulée dans le Théorème 1. Puis on utilise un théorème de Matsumura pour obtenir une caractérisation homologique. Enfin, la démonstration s'achève par une analyse directe du résultat trouvé.

Dans la deuxième partie nous déterminons d'abord tous les complexes simpliciaux finis $\Delta$ qui ont la propriété plus forte, que pour tous leurs sous-complexes pleins $\Delta'$, l'anneau des faces du sous-complexe est Cohen-Macaulay.(Premier paragraphe.) La classe de ces complexes sera la classe des complexes simpliciaux qui sont en même temps des matroïdes, c.à.d. que leurs faces peuvent être considérées comme un système d'indépendants (Théorème 6.). Le résultat suggère d'étudier spécialement les anneaux des faces des matroïdes. Dans le deuxième paragraphe de la deuxième partie nous introduissons un concept de caractéristique d'Euler pour les matroïdes et nous recherchons tous les matroïdes de caractéristique 0,1, ou -1. Enfin dans le troisième paragraphe de la deuxième partie nous déterminons en utilisant un théorème de Hochster et les résultats du deuxième paragraphe tous les matroïdes dont l'anneau des faces est de Gorenstein.

**Remerciements:** Je suis très reconnaissant envers le professeur Bernard Teissier qui m'a proposé ce sujet captivant, qui a sacrifié beaucoup de son temps précieux pour me faire avancer aux moments où je n'ai plus clairement vu , comment continuer, et qui m'a donné une aide inestimable à la rédaction de mon premier essai en Français. Je remercie également l'École Normale Supérieure (Paris) et le Collège Eötvös (Budapest), dont l'échange culturel m'a permis d'élargir mes connaissances mathématiques à Paris pendant neuf mois.

## I. LE THEOREME DE REISNER

**Notations:** La notation $\Delta$ désigne un complexe simplicial fini, et l'on écrit $\sigma \in \Delta$ si $\sigma$ est une face de $\Delta$. Notons $\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ l'ensemble des sommets de $\Delta$. La notation $k$ désigne un corps quelconque, et $\overline{k}$ sa clôture algébrique. $\diamond$

**Définition 1:** Soit $I(\Delta)$ l'idéal de $k[x_1, ..., x_n]$ engendré par tous les $\prod_{v_i \in \mu} x_i$, où $\mu$ parcourt tous les sous-ensembles de $V$ qui ne sont pas des faces de $\Delta$. Notons par $k[\Delta]$ le quotient de $k(x_1, ..., x_n)$ par $I(\Delta)$. $\diamond$

**Définition 2:** Représentons le complexe $\Delta$ de $n$ sommets dans $\overline{k}^n$ de la manière suivante: soit $e_1, ...e_n$ une base fixée de $\overline{k}^n$, $V(\sigma)$ le sous-espace vectoriel engendré par les

$e_i$ avec $v_i \in \sigma$ pour chaque $\sigma \in \Delta$. La représentation de $\Delta$ dans $\bar{k}^n$ sera

$$V(\Delta) = \bigcup_{\sigma \in \Delta} V(\sigma). \qquad \diamond$$

**Remarque 1:** Il suffit de prendre cette réunion pour les faces maximales. ◇

**Proposition 1:**

$$I(\Delta) = I(V(\Delta)),$$

*c.à.d. $I(\Delta)$ est l'ensemble des polynômes s'annulant sur $V(\Delta)$.*

*Preuve:* Il est évident que $I(\Delta)$ s'annule sur $V(\Delta)$. Supposons le contraire, qu'il existe un polynôme $f$ dans $I(V(\Delta)) \setminus I(\Delta)$. Dans ce cas, en écrivant $f$ comme somme des monômes, la décomposition contient un monôme non nul de $k[x_{i_1}, ..., x_{i_k}]$, où $\sigma = \{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$ est une face de $\Delta$. Donc en substituant tous les points de $V(\sigma)$ dans $f$, on obtient une fonction polynômiale non nulle des variables $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$. Alors $f$ ne s'annule pas sur $V(\sigma)$, car $\bar{k}^n$ est infini. Cette contradiction implique $I(\Delta) = I(V(\Delta))$. ◇

**Corollaire 1:** $I(\Delta) = \mathrm{Rad}(I(\Delta))$, et $\bigcap_{\sigma \text{ face maximale}} I(V(\sigma))$ est la décomposition primaire de $I(\Delta)$. ◇

**Définition 3:** Un *sous-complexe* $\Delta'$ d'un complexe $\Delta$ est un complexe satisfaisant à $\Delta' \subseteq \Delta$. Un *sous-complexe plein* est un sous-complexe, dont les sommets forment un sous-ensemble de $\mathcal{V}(\Delta)$ et la structure des faces s'obtient par restriction de la structure des faces de $\Delta$, c.à.d. que pour un $\sigma \subseteq \mathcal{V}(\Delta')$ on a $\sigma \in \Delta'$ si et seulement si $\sigma \in \Delta$. ◇

**Remarque 2:** Pour un sous-complexe $\Delta'$ de $\Delta$ on peut considérer $V(\Delta')$ comme une sous-variété de $V(\Delta)$. ◇

**Lemme 1:** *Soit $A$ un anneau commutatif noethérien réduit, i.e. $0 = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda$ où $\Lambda$ est un ensemble fini, et les $p_\lambda$ sont les idéaux premiers, et soit $m$ un idéal maximal de $A$. Considérons l'homomorphisme $\varphi : A \longrightarrow A/\bigcap_{p_\lambda \subseteq m} p_\lambda$ .Alors $\varphi(m)$ est un idéal maximal de $\varphi(A)$, et les anneaux locaux $A_m$ et $\varphi(A)_{\varphi(m)}$ sont isomorphes.*

*Preuve:* Il est évident que $\varphi(m)$ est un idéal maximal de $A$. (Deuxième théorème d'isomorphisme.)

Si pour $f \in A$, $g \in A \setminus m$ on a $\frac{f}{g} = 0$ dans $A_m$ c.à.d. qu'il existe un $h \in A \setminus m$ tel que $h \cdot f = 0$, alors $\varphi(g)$ et $\varphi(h)$ sont dans $\varphi(A) \setminus \varphi(m)$, et ainsi $\frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} \sim 0$ dans $\varphi(A)_{\varphi(m)}$. Donc l'homomorphisme $\varphi$ induit un homomorphisme

$$\tilde{\varphi} : A_m \longrightarrow \varphi(A)_{\varphi(m)}$$

$$\frac{f}{g} \mapsto \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)}$$

La surjectivité de $\varphi$ implique directement la surjectivité de $\tilde{\varphi}$. Il reste à montrer l'injectivité de $\tilde{\varphi}$.

Supposons que $\tilde{\varphi}(\frac{f}{g}) = 0$ dans $\varphi(A)_{\varphi(m)}$, ce qui équivaut à l'existence d'un élément $h \in \varphi(A) \setminus \varphi(m)$ tel que $h \cdot \varphi(f) = 0$ dans $\varphi(A)$. Soit $h_0$ une image inverse de $h$ dans $A$.



Maintenant $\varphi(h_0 \cdot f) = 0$ est équivalent à $h_0 \cdot f \in \bigcap_{p_\lambda \subseteq m} p_\lambda$. En sachant que

$$S_m^{-1}(\bigcap_{p_\lambda \subseteq m} p_\lambda) = S_m^{-1}(\bigcap_{p_\lambda \subseteq m} p_\lambda) \cap \bigcap_{p_\lambda \not\subseteq m} S_m^{-1}(p_\lambda) = S_m^{-1}(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda) = 0$$

dans $A_m$, ($S_m$ note $A \setminus m$) on voit que $h_0 \cdot f = 0$ dans $A_m$. Évidemment $h_0 \in A \setminus m$, donc nous sommes arrivés à démontrer $\frac{f}{g} = 0$ dans $A_m$. ◇

**Définition 4:** Pour un idéal maximal $m$ de $k[\Delta]$ appelons *étoile de $m$* et notons $\text{ét}(m)$ le sous-complexe plein

$$\text{ét}(m) = \bigcup_{\sigma \text{ face maximale tq. } I(V(\sigma)) \subseteq m} \sigma. \qquad \diamond$$

**Corollaire 2:** L'anneau $k[\Delta]_m$ est isomorphe à $k[\text{ét}(m)]_{\varphi(m)}$ où $m$ est n'importe quel idéal maximal de $k[\Delta]_m$ et $\varphi : k[\Delta]_m \longrightarrow k[\text{ét}(m)]$ est l'homomorphisme induit par l'inclusion naturelle $V(\text{ét}(m)) \longrightarrow V(\Delta)$.

*Preuve:* On applique le lemme en prenant $A = k[\Delta]$. Les $p_\lambda$ seront les $I(V(\sigma))$ avec les $\sigma$ faces maximales. ◇

**Définition 5:** Pour $m$ idéal maximal de $k[\Delta]$ notons *support de $m$* l'ensemble

$$\mathrm{supp}(m) = \{v_i \in \mathcal{V} \mid x_i \notin m\}. \qquad \diamond$$

**Proposition 2:** *$\mathrm{supp}(m)$ est une face de $\Delta$*

*Preuve:* $\prod_{v_i \in \mathrm{supp}(m)} x_i \not\equiv 0 \pmod m$, donc $\prod_{v_i \in \mathrm{supp}(m)} x_i$ n'est pas zéro dans $k[\Delta]$. ◇

**Définition 6:** Pour $\tau \in \Delta$ soit

$$\mathrm{link}(\tau) = \{\sigma \in \Delta \mid \sigma \cap \tau = \emptyset \wedge \sigma \cup \tau \in \Delta\}. \qquad \diamond$$

**Pour démontrer le premier théorème nous aurons encore besoin du lemme suivant:**

**Lemme 2:** *Pour un corps $k$ tout idéal maximal de $k[x_1, ..., x_r]$ peut être engendré par $r$ polynômes.*

*Preuve:* Par induction sur $r$. Pour $r = 1$ l'énoncé est vrai, car $k[x_1]$ est un anneau principal. Considérons un idéal maximal $m$ de l'anneau $k[x_1, ..., x_r]$. L'intersection de $m$ et de $k[x_1, ..., x_{r-1}]$ est un idéal maximal dans $k[x_1, ..., x_{r-1}]$, donc selon l'hypothèse de l'induction elle peut être engendrée par des polynômes $p_1, ..., p_{r-1}$. L'idéal engendré par les mêmes polynômes dans $k[x_1, ..., x_r]$ est contenu dans $m$. Le quotient de $k[x_1, ..., x_r]$ par $(p_1, ..., p_{r-1})$ est isomorphe à $K[x_r]$, où $K$ est une extension algébrique de k. dont $m/(p_1, ..., p_{r-1})$ est un idéal maximal. Alors il peut être engendré par un $\bar{p}_r \in K[x_r]$, dont une image inverse $p_r$ dans $k[x_1, ..., x_r]$ satisfait à $m = (p_1, ..., p_r)$. ◇

**Théorème 1:** *L'anneau $k[\Delta]$ est Cohen-Macaulay si et seulement si pour chaque $\tau \in \Delta$ et pour chaque extension algébrique $K$ de $k$ engendrée par $|\tau|$ éléments comme $k$-algèbre, l'anneau local $K[\mathrm{link}(\tau)]_{(x_i \mid v_i \in \tau)}$ est Cohen-Macaulay.($|\tau|$ désigne le nombre des éléments de $\tau$.)*

*Preuve:* Supposons d'abord que $k[\Delta]$ est Cohen-Macaulay. Pour simplifier la notation, nous pouvons prendre $\tau = \{v_1, ..., v_r\}$. $K$ est isomorphe à un quotient de l'anneau $k[x_1, ..., x_r]$ par un idéal maximal $m_K$. Selon le Lemme 2, l'idéal maximal $m_K$ s'écrit dans la forme $m_K = (f_1, ..., f_r)$. Considérons l'idéal $m = (f_1, ..., f_r, x_{r+1}, ..., x_n)$ dans $k[x_1, ..., x_n]$. Évidemment on a $I(\Delta) \subseteq (x_{r+1}, ..., x_n) \subseteq m$, alors on peut considérer $m$ aussi comme idéal maximal de $k[\Delta]$. Pour un $\sigma \in \Delta$ on a $I(V(\sigma)) \subseteq m$ si et seulement si $\sigma \supseteq \tau$, car $x_i \notin m$ pour $i = 1, 2, ..., r$.

En appliquant le Corollaire 2, nous pouvons supposer que ét$(m) = \Delta$, c.à.d. que $\tau$ est contenu dans toutes les faces maximales. En même temps on peut supposer supp $m = \tau$, car, en substituant quelques $x_i$ par $x_i - 1$ on peut arriver à un $m_K$ qui donne un corps isomorphe comme quotient, mais qui ne contient aucun des monômes $x_1, ..., x_r$.

Montrons que $f_1, ..., f_r$ est une suite régulière dans $k[\Delta]$:

Soit $f_i \cdot u_i = \sum_{j=1}^{i-1} f_j \cdot u_j$. Écrivons les éléments de $k[\Delta]$ sous la forme $\sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \cdot \prod_{i=k+1}^{n} x_i^{\alpha_i}$, où les $a_{\underline{\alpha}}$ sont des éléments de $k[x_1, ..., x_r]$. (N'oublions pas, que $x_1, ..., x_r$ engendrent une algèbre transcendante sur $k$ dans $k[\Delta]$.) Alors pour tout $\underline{\alpha}$ on a $f_i \cdot a_{\underline{\alpha}}(u_i) = \sum_{j=1}^{i-1} f_j \cdot a_{\underline{\alpha}}(u_j)$. Ces derniers sont des équations dans $k[x_1, ..., x_r]$, où $f_1, ..., f_r$ est évidemment une suite régulière. Donc $a_{\underline{\alpha}}(u_i) \in \sum_{j=1}^{i-1} f_j \cdot k[x_1, ..., x_r]$ pour chaque $\underline{\alpha}$: on en tire l'inclusion $u_i \in (f_1, ..., f_{i-1})$.

Donc $f_1, ..., f_r$ est une suite régulière dans $k[\Delta]$ et elle est régulière dans $k[\Delta]_m$ aussi. Donc $k[\Delta]_m$ est Cohen-Macaulay si et seulement si

$$(k[\Delta]/(f_1, ..., f_r))_{m/(f_1, ..., f_r)}$$

est Cohen-Macaulay. Ce dernier est isomorphe à $K[\text{link}(\tau)]_{(x_i | v_i \in \tau)}$

Montrons maintenant l'autre implication de l'équivalence. Soit $m$ un idéal maximal quelconque de $k[\Delta]$. Notons $\tau = \text{supp(m)}$. On peut supposer $\tau = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$. Alors on trouve $I(V(\tau)) = \{x_{r+1}, ..., x_n\} \subseteq m$. Donc $m/I(V(\tau))$ est un idéal maximal de $k[\Delta]/I(V(\tau))$ qui est isomorphe à $k[x_1, ..., x_r]$, c.à. d. à un anneau régulier. Ceci implique l'existence des éléments $f_1, ..., f_r$ tels que $m/I(V(\tau))$ soit égal à $(f_1, ..., f_r)$. Dans ce cas on a

$$m = (f_1, ..., f_r, x_{r+1}, ..., x_n).$$

À partir d'ici la démonstration s'achève d'une manière pareille à celle de l'implication inverse. ◇

**Définition 7**: Notons *la dimension d'une face* $\dim \sigma = |\sigma| - 1$, et *la dimension d'un complexe simplicial* $\dim \Delta = \max\{\dim \sigma \mid \sigma \in \Delta\}$. ◇

**Proposition 3**: *Pour les dimensions des anneaux* $k[\Delta]$ *resp.* $k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$ on a

$$\dim k[\Delta] = \dim k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)} = \dim \Delta + 1$$

*Preuve:* Selon le Corollaire 1 les idéaux premiers minimaux contenant 0 sont les $I(V(\sigma))$ avec un $\sigma$ face maximale. Alors

$$\dim k[\Delta] = \max_{\sigma \text{ face maximale}} \dim k[\Delta]/I(V(\sigma)) = \max_{\sigma \text{ face maximale}} |\sigma| = \dim \Delta + 1$$



D'autre part $\dim k[\Delta] = \dim k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$, car $(x_1, ..., x_n)$ contient tous les idéaux $I(V(\sigma))$ où $\sigma$ est une face maximale. ◇

En utilisant Matsumura [1], p. 131 nous sommes en mesure à donner une condition équivalente à celle que l'anneau local $k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$ soit Cohen-Macaulay.

**Proposition 4**: *L'anneau* $k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$ *est Cohen-Macaulay si et seulement si*

$$H_i(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ pour } i = n, n-1, ..., n - \dim \Delta$$

$H_i(x_1, ..., x_n)$ *dénote ici l i-ième module d'homologie du complexe de Koszul* $K_i(x_1, ..., x_n)$ *issu de l'anneau* $k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$.

En effet la condition ci-dessus est équivalent à prof $k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)} \geq \dim k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$, et prof $k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)} \leq \dim k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$ est toujours vrai. (prof. désigne la profondeur.) ◇

**Remarque 3**: On peut prendre au lieu du complexe de Koszul de l'anneau $k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$ celui de $k[\Delta]$.

En effet, il est facile de vérifier que le foncteur $\_ \otimes k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$ défini sur la catégorie des $k[\Delta]$-modules est fidèlement plat. ◇

**Définition 8**: Soit $\Delta$ un complexe simplicial fini. Associons à $\Delta$ *le complexe des faces* $C_\bullet(k, \Delta)$, où $C_\bullet(k, \Delta)$ est un $k$-espace vectoriel ayant les faces de dimension $r$ comme base. La dérivation est donnée sur les éléments de cette base: pour $\sigma = \{v_{i_1}, ..., v_{i_r}\}$ $(i_1 < ... < i_r)$ posons $d(\sigma) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} \sigma \setminus \{v_{i_j}\}$. Mettons $C_{-1}(k, \Delta) \cong k$ (avec la base $\emptyset$) et pour chaque $\sigma$ face de dimension 1 posons $d(\sigma) = \emptyset$. Enfin $d(\emptyset)$ sera zéro, bien sûr.

Notons $C^\bullet(k, \Delta)$ le complexe dual de $C_\bullet(k, \Delta)$, c.à.d. le complexe Hom $(C_\bullet(k, \Delta), k)$. Les complexes d'homologie de $C_\bullet(k, \Delta)$ respectivement $C^\bullet(k, \Delta)$ seront notés $H_\bullet(k, \Delta)$ respectivement $H^\bullet(k, \Delta)$. ◇

Il est connu que les complexes d'homologie restent les mêmes si on ne change que la numérotation des éléments de $\mathcal{V}$.

Le théorème suivant donne une caractérisation des complexes $\Delta$ pour lesquels $k[\Delta]_m$ est Cohen-Macaulay en utilisant le dual du complexe des faces.

**Théorème 2**: $k[\Delta]_{(x_1, ..., x_n)}$ *est Cohen-Macaulay si et seulement si pour chaque sous-complexe plein* $\Delta'$ *de* $\Delta$ *notant* $\mathcal{V}'$ *l'ensemble des sommets, on a:*

$$H^i(k, \Delta') = 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, ..., \dim \Delta - |\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}'| - 1$$

*Preuve:* Nous utiliserons la condition équivalente mentionnée dans la Remarque 3. Soit $F_r(\Delta)$ la $r$-ième puissance extérieure de $k[\Delta]$. Notons $e_r$ l'unité du $r$-ième exemplaire de $k[\Delta]$. Définissons la dérivation par les formules

$$d(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge ... \wedge e_{i_r}) = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} x_{i_j} \cdot e_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge ... \wedge e_{i_r}$$

("l'accent circonflexe" signifie l'omission), et

$$d(e_r) = 1 \quad (r = 1, 2, ...)$$

Selon la Proposition 4 et la Remarque 3, $k[\Delta]_{(x_1,\dots,x_n)}$ est Cohen-Macaulay si et seulement si

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_{n-\dim\Delta} \longrightarrow F_{n-\dim\Delta-1}$$

est une suite exacte.

Pour $\underline{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{N}^n$ soit $F_r^{\underline{\alpha}}$ le $k$-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ où

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i \notin \{i_1, \dots, i_r\} \\ \alpha_i - 1 & \text{si } i \in \{i_1, \dots, i_r\} \end{cases}$$

Bien sûr on ne prend que les $x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ avec les $\beta_i$ non négatifs. Pour un $\underline{\alpha}$ fixé les $F_r^{\underline{\alpha}}$ forment un complexe des $k$-espaces vectoriels avec la même dérivation. Évidemment $F_\bullet$ considéré comme complexe de $k$-espaces vectoriels est la somme directe des complexes $F_\bullet^{\underline{\alpha}}$. Alors

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_{n-\dim\Delta} \longrightarrow F_{n-\dim\Delta-1}$$

est une suite exacte si et seulement si

$$0 \longrightarrow F_n^{\underline{\alpha}} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_{n-\dim\Delta}^{\underline{\alpha}} \longrightarrow F_{n-\dim\Delta-1}^{\underline{\alpha}}$$

est une suite exacte pour tout $\underline{\alpha}$.

Notons queue $(\underline{\alpha}) = \{v_i \mid \alpha_i \geq 2\}$ et supp $(\underline{\alpha}) = \{v_i \mid \alpha_i \neq 0\}$. Remarquons, que $\emptyset \subseteq$ queue $(\underline{\alpha}) \subseteq$ supp $(\underline{\alpha}) \subseteq \mathcal{V}$ et si on prend n'importe quels deux sous-ensembles $\mu$ et $\nu$ tel que $\emptyset \subseteq \mu \subseteq \nu \subseteq \mathcal{V}$ alors on peut trouver une infinité de $\underline{\alpha}$ tel que queue $(\underline{\alpha}) = \mu$ et supp $(\underline{\alpha}) = \nu$.

Soit $G_{\mu,\nu}^r(\Delta)$ un $k$-espace vectoriel ayant comme base toutes les faces $\sigma$ de $\Delta$ de dimension $r$ tel que $\sigma \subseteq \nu$ et $\sigma \cup \mu$ soit une face de $\Delta$. Définissons la dérivation sur $G^\bullet - \mu, \nu$ par la formule

$$d(\sigma) = \sum_{j=1}^{|\nu|-r+1} (-1)^{j-1} \langle \sigma \cup \{v_{i_j}\} \rangle$$

où $v_{i_j}$ parcourt les éléments de $\nu \setminus \sigma$ et

$$\langle \sigma \cup \{v_{i_j}\} \rangle = \begin{cases} \sigma \cup \{v_{i_j}\} & \text{si } \sigma \cup \{v_{i_j}\} \cup \mu \text{ est une face} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Un élément $x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n} \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \in F_r^{\underline{\alpha}}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$\prod_{v_i \in \text{queue}(\underline{\alpha})} x_i^{\beta_i - 1} \cdot \prod_{v_i \in \sigma} x_i \cdot e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$$

où $\sigma$ est un élément de $G_{\text{queue}(\underline{\alpha}),\text{supp}(\underline{\alpha})}^{|\text{supp}(\underline{\alpha}|-r-1}$. D'autre part chaque $\sigma$ élément de la base de $\sigma$ est un élément de $G_{\text{queue}(\underline{\alpha}),\text{supp}(\underline{\alpha})}^{|\text{supp}(\underline{\alpha})|-r-1}$ détermine un élément de la base de $F_r^{\underline{\alpha}}$. Ainsi nous avons



trouvé un isomorphisme d'espaces vectoriels $F_\bullet^{\underline{\alpha}}$ et $G_{\text{queue}(\underline{\alpha}),\text{supp}(\underline{\alpha})}^\bullet$ qui est compatible avec les dérivations.

Donc nous avons démontré que $k[\Delta]_{(x_1,\dots,x_n)}$ est Cohen-Macaulay si et seulement si pour chaque $\emptyset \subseteq \mu \subseteq \nu \subseteq \mathcal{V}$

$$0 \longrightarrow G_{\mu,\nu}^{-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow G_{\mu,\nu}^{|\nu|-n+\dim\Delta}$$

est une suite exacte.

Remarquons d'abord qu'il suffit de regarder les complexes $G_{\mu,\nu}^\bullet$ pour lesquels $\mu$ est une face de $\Delta$, car pour les autres $\mu$, l'espace vectoriel $G_{\mu,\nu}^\bullet$ est zéro. Nous allons démontrer qu'on peut supposer $\mu = \emptyset$. Avec ceci nous aurons terminé, car le complexe $G_{\emptyset,\nu}^\bullet$ s'identifie d'une façon naturelle avec le complexe $C^\bullet(k,\nu)$ où $\nu$ est considéré comme sous-complexe plein.

Supposons alors que $\mu$ est une face non-vide. Chaque $\sigma \in \Delta$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $\sigma' \cup \sigma''$ avec $\sigma\prime \subseteq \mu$ et $\sigma\prime\prime \cap \mu = \emptyset$. Cette décomposition induit l'isomorphisme des complexes $G_{\mu,\nu}^\bullet$ et $G_{\emptyset,\mu}^\bullet \otimes G_{\emptyset,\text{link}_\nu(\mu)}^\bullet$. En appliquant la formule de Künneth des complexes des espaces vectoriels on trouve que $H(G_{\mu,\nu}^\bullet)$ est isomorphe au produit tensoriel de $H(G_{\emptyset,\nu}^\bullet)$ et d'un autre complexe. Mais, comme on le démontre en topologie algébrique, les modules d'homologie d'un simplexe non-vide sont nuls c.à.d. que $H(G_{\emptyset,\nu}^\bullet)$ est nul. Donc on peut vraiment omettre le cas des $\mu$ non-vides. $\diamond$

**Corollaire 3:** *Le fait, que $k[\Delta]_{(x_1,\dots,x_n)}$ soit ou non Cohen-Macaulay , ne dépend que de la caractéristique du $k$.*

En effet pour donner la réponse en utilisant le théorème précédent, il faut calculer le rang d'un nombre fini des matrices composées des 0-s 1-s et $-1$-s. Le rang de telles matrices ne dépend que de la caractéristique. $\diamond$

Nous pouvons profiter de cette petite remarque pour simplifier le Théorème 1:

**Théorème 1':** *L'anneau $k[\Delta]$ est Cohen-Macaulay si et seulement si $k[\text{link}\tau]_{(x_i|v_i\in\tau)}$ est Cohen-Macaulay pour chaque face $\tau$.* $\diamond$

Résumons les théorèmes 1' et 2 en

**Théorème 3:** *$k[\Delta]$ est Cohen-Macaulay si et seulement si pour chaque complexe $L$ de la forme $L = \text{link}\tau$ ($\tau \in \Delta$) et tout sous-complexe plein $L'$ de $L$ on a*

$$H^i(k, L') = 0 \quad \text{pour} \quad i \leq \dim L - |\mathcal{V}(L) - \mathcal{V}(L')| - 1 \quad (1) \quad \diamond$$

Enfin, nous sommes arrivés à la démonstration du théorème de Reisner.

**Théorème 4:** *$k[\Delta]$ est Cohen-Macaulay si et seulement si pour chaque face $\tau$ de $\Delta$*

$$H^i(\text{link}\tau, k) = 0 \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, \dim\tau - 1 \quad (2)$$

*Preuve:* La nécessité de la condition de l'annulation des homologies ci-dessus est évidente d'après le Théorème 3.

Il suffit de montrer que la condition (2) entraîne la condition (1). On raisonne par induction sur $|\mathcal{V}(L)| + |\mathcal{V}(L) \setminus \mathcal{V}(L')|$.

Pour $L = L' = \emptyset$ la condition (2) est vraie. Supposons qu'elle est vraie pour $L'$ sous-complexe plein de $L$ et considérons le sous-complexe plein $L' \setminus \{v\}$ obtenu par l'élimination d'un sommet $v$. Le noyau de l'application

$$C^r(k, L') \longrightarrow C^r(k, L' \setminus \{v\})$$

$$\sigma \mapsto \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma \subseteq \mathcal{V}(L') \setminus \{v\} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

s'identifie avec $C^{r-1}(k, \mathrm{link}_{L'}\{v\})$. Ainsi on a la suite exacte des complexes

$$0 \longrightarrow C^{r-1}(k, \mathrm{link}_{L'}\{v\}) \longrightarrow C^r(k, L') \longrightarrow C^r(k, L' \setminus \{v\}) \longrightarrow 0$$

On en déduit la suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow H^r(k, L') \longrightarrow H^r(k, L' \setminus \{v\}) \longrightarrow H^r(k, \mathrm{link}_{L'}\{v\}) \longrightarrow \ldots$$

Si $L = \mathrm{link}\tau$ alors $\mathrm{link}_{L'}\{v\}$ est un sous-complexe $L'_1$ de $L_1 = \mathrm{link}(\tau \cup \{v\})$. On a $|\mathcal{V}(L) \setminus \mathcal{V}(L')| = |\mathcal{V}(L_1) \setminus \mathcal{V}(L'_1)|$ et $|\mathcal{V}(L_1)| = |\mathcal{V}(L)| - 1$; on peut appliquer l'hypothèse de l'induction et trouver

$$H^r(k, \mathrm{link}_{L'}\{v\}) = 0 \quad \text{si} \quad r \leq \dim L_1 - |\mathcal{V}(L) \setminus \mathcal{V}(L')| - 1.$$

D'autre part selon l'hypothèse de l'induction on a

$$H^r(k, L') = 0 \quad \text{pour} \quad r \leq \dim L - |\mathcal{V}(L) - \mathcal{V}(L')| - 1.$$

Donc on a

$$H^r(k, L' \setminus \{v\}) = 0 \ \text{ si } \ r \leq \min(\dim L_1 - |\mathcal{V}(L) \setminus \mathcal{V}(L')| - 1, \dim L - |\mathcal{V}(L) - \mathcal{V}(L')| - 1).$$

Puisque $\dim L - |\mathcal{V}(L) - \mathcal{V}(L' \setminus \{v\})| - 1 = \dim L - |\mathcal{V}(L) - \mathcal{V}(L')| - 2$, il suffit de montrer que la condition (2) implique

$$\dim L - |\mathcal{V}(L) - \mathcal{V}(L')| - 2 \leq \dim L_1 - |\mathcal{V}(L) \setminus \mathcal{V}(L')| - 1$$

qui est équivalent à

$$\dim L \leq \dim L_1 + 1.$$

Notons que si la condition (2) est vraie pour $\Delta$ elle est vraie aussi pour tout $L = \mathrm{link}\tau$, où $\tau \in \Delta$. Alors pour finir il suffit de montrer le lemme suivant:

**Lemme 3:** *Soit $\Delta$ un complexe simplicial fini, satisfaisant à la condition (2). Alors toutes les faces maximales de $\Delta$ sont de même dimension.*

*Preuve:* Cherchons un $\Delta$ contre-exemple minimal. Soient $\sigma$ et $\tau$ des faces maximales tel que $\dim\sigma \neq \dim\tau$. Si $\sigma \cap \tau$ est non-vide alors $\mathrm{link}(\sigma \cap \tau)$ est un contre-exemple plus petit que $\Delta$ qui est impossible. ($\sigma \setminus (\sigma \cap \tau)$ et $\tau \setminus (\sigma \cap \tau)$ seront faces maximales des dimensions différentes.) Donc on peut supposer $\sigma \cap \tau = \emptyset$ pour tous les couples $\sigma, \tau$



de faces maximales de dimensions différentes. Soit $\Delta'$ la réunion des faces maximales de dimension maximale, $\Delta''$ la réunion des autres faces maximales. Alors $\Delta$ est la réunion disjointe des complexes simpliciaux non-vides $\Delta'$ et $\Delta''$. Donc pour $r \geq 0$ on a

$$C^r(k, \Delta) = C^r(k, \Delta') \oplus C^r(k, \Delta'').$$

À cause de $H^0(k, \Delta) = 0$ le rang de l'application $C^0(k, \Delta) \longrightarrow C^1(k, \Delta)$ est

$$|\mathcal{V}(\Delta)| - 1 = |\mathcal{V}(\Delta')| + |\mathcal{V}(\Delta'')| - 1.$$

Mais le rang de ces applications est inférieur ou égale à la somme des rangs des applications $C^0(k, \Delta') \longrightarrow C^1(k, \Delta')$ et $C^0(k, \Delta'') \longrightarrow C^1(k, \Delta'')$. Ainsi on peut supposer par exemple que le rang de l'application $C^0(k, \Delta') \longrightarrow C^1(k, \Delta')$ est au moins $|\mathcal{V}(\Delta')|$. En même temps du complexe

$$\ldots \longrightarrow C^{-1}(k, \Delta') \longrightarrow C^0(k, \Delta') \longrightarrow C^1(k, \Delta') \longrightarrow \ldots$$

on déduit que ce rang peut être au maximum $|\mathcal{V}(\Delta')| - 1$. Avec cette contradiction nous sommes arrivés à la fin de la démonstration. $\diamond\diamond$

## II. LE CAS DES MATROIDES

### 1. matroïdes et la propriété Cohen-Macaulay

**Théorème 5:** *Soit $\mathcal{C}$ une classe des complexes simpliciaux finis, telle que tout complexe $\Delta$ appartenant à $\mathcal{C}$ aie les propriétés suivantes:*

*(i) Pour tout $\tau$ face de $\Delta$, le complexe $\mathrm{link}_\Delta\tau$ appartient à $\mathcal{C}$.*

*(ii) Toutes les faces maximales de $\Delta$ sont de même dimension.*

*(iii) Tout sous-complexe plein $\Delta'$ de $\Delta$ appartient à $\mathcal{C}$.*

*Alors l'anneau $k[\Delta]$ est Cohen-Macaulay pour tous les complexes $\Delta$ de la classe $\mathcal{C}$.*

*Preuve:* Selon le théorème de Reisner il suffit de montrer que pour tout complexe $\Delta$ de classe $\mathcal{C}$ on a

$$H^r(k, \Delta) = 0 \quad \text{pour} \ r \leq \dim\Delta - 1,$$

car on a la propriété (i), qui garantit la même chose pour tous les $\mathrm{link}_\Delta\tau$.

On va démontrer cette proposition par récurrence sur $|\mathcal{V}|$. Pour $|\mathcal{V}| = 0$, c.à.d. que $\Delta = \emptyset$ elle est évidemment vraie. Soit $\Delta$ un complexe simplicial de classe $\mathcal{C}$ quelconque.

Supposons d'abord que $\Delta$ a un sommet $v$ qui n'appartient pas à toutes les faces maximales. Notons $\Delta'$ le sous-complexe plein dont l'ensemble des sommets est $\mathcal{V} \setminus \{v\}$. On a

$$\dim\Delta = \dim\Delta'.$$

En effet, il existe une face maximale de $\Delta$, qui ne contient pas $v$, et qui est donc face maximale de $\Delta'$ aussi. D'autre part, selon (ii) la dimension de cette face est la même que celle de $\Delta$, ou celle de $\Delta'$. Le noyau de l'application

$$C^i(k, \Delta) \longrightarrow C^i(k, \Delta'),$$

définie par

$$\sigma \mapsto \begin{cases} \sigma & \text{si } v \notin \sigma \\ 0 & \text{si } v \in \sigma \end{cases}$$

s'identifie d'une manière naturelle avec $C^{i-1}(k, \mathrm{link}_\Delta\{v\})$. Donc on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow C^{i-1}(k, \mathrm{link}_\Delta\{v\}) \longrightarrow C^i(k,\Delta) \longrightarrow C^i(k,\Delta') \longrightarrow 0,$$

qui (étant compatible avec les dérivations) implique la suite exacte longue

$$\ldots \longrightarrow H^{i-1}(k, \mathrm{link}_\Delta\{v\}) \longrightarrow H^i(k,\Delta) \longrightarrow H^i(k,\Delta') \longrightarrow \ldots$$

Alors selon l'hypothèse de l'induction, on a

$$H^i(k,\Delta) = 0 \quad \text{si } i-1 \leq \dim \mathrm{link}_\Delta\{v\} - 1 \text{ et } i \leq \dim \Delta' - 1 = \dim \Delta - 1.$$

N'importe quelle face maximale $\sigma$ de $\Delta$ contenant $v$ est de même dimension que $\Delta$ et $\sigma \setminus \{v\}$ est une face maximale de $\mathrm{link}_\Delta\{v\}$, d'où on a $\dim \mathrm{link}_\Delta\{v\} = \dim \Delta - 1$. Donc la condition $i - 1 \leq \dim \mathrm{link}_\Delta\{v\} - 1$ est aussi équivalente à $i \leq \dim \Delta - 1$ ce qui était à montrer.

Supposons maintenant que tous les sommets de $\Delta$ sont contenus dans toutes les faces maximales. Dans ce cas là l'ensemble des sommets $\mathcal{V}$ est lui-même la seule face maximale, c.à.d. que $\Delta$ est un simplexe. Mais pour un simplexe on a $H^i(k,\Delta) = 0$ pour tout $i$. $\diamond$

**Remarque 4:** La classe $\mathcal{CM}$ des tous les complexes dont l'anneau des faces est Cohen-Macaulay, satisfait à (i) (à cause du théorème de Reisner), et à (ii) (selon le Lemme 3). $\diamond$

Maintenant nous allons déterminer la plus grande sous-classe de $\mathcal{CM}$ satisfaisant aussi à (iii).

**Définition 9:** Rappelons qu'un *matroïde* $\mathcal{M}$ est la donnée d'un ensemble fini $M$ et d'un système $\mathcal{I}$ des sous-ensembles de $M$ nommé *indépendants de* $\mathcal{M}$ satisfaisant aux axiomes suivants:

(I.) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(II.) $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$ implique $J \in \mathcal{I}$

(III.) Si $I, J \in \mathcal{I}$ et $|I| < |J|$, alors il existe un $v \in J \setminus I$ tel que $I \cup \{v\} \in \mathcal{I}$. $\diamond$

**Théorème 6:** *L'anneau $k[\Delta']$ est Cohen-Macaulay pour tous les sous-complexes pleins $\Delta'$ d'un complexe simplicial fini $\Delta$ si et seulement si les faces de $\Delta$ satisfont aux axiomes (I.)-(III.), i.e. $\Delta$ est un matroïde.*

*Preuve:* Supposons d'abord que pour tout $\Delta'$ sous-complexe plein de $\Delta$ l'anneau $k[\Delta']$ est Cohen-Macaulay. Tous les complexes simpliciaux satisfont aux axiomes (I.) et (II.), reste à montrer (III.). Soient $\sigma$ et $\tau$ deux faces de $\Delta$ avec $|\sigma| < |\tau|$. Considérons les sous-complexe plein $\Delta'$ dont l'ensemble des sommets est $\sigma \cup \tau$. Selon l'hypothèse $k[\Delta']$ est Cohen-Macaulay, donc d'après le Lemme 3 toutes les faces maximales de $\Delta'$ sont de même cardinalité. Ainsi $\sigma$ ne peut pas être une face maximale: il existe un $v$ dans $\mathcal{V}(\Delta') \setminus \sigma$ alors dans $\tau \setminus \sigma$ tel que $\sigma \cup \{v\}$ est une face de $\Delta'$ et ainsi de $\Delta$ aussi.

Pour l'implication inverse remarquons que, si $\Delta$ est un matroïde alors tout sous- -complexe plein de $\Delta$ est un matroïde (sous-matroïde de l'originel), et pour tout $\tau \in \Delta$



le complexe $\mathrm{link}_\Delta \tau$ est un matroïde (dans la langage de la théorie des matroïdes il s'agit du sous-matroïde "contraction de $\Delta$ par $\tau$", obtenu par l'omission des "lacets", c.à.d. les éléments $v$ pour lesquels $\{v\}$ n'est pas indépendant). En outre, dans un matroïde tous les indépendants maximaux sont de même cardinalité. Donc la classe des complexes simpliciaux $\Delta$ qui sont des matroïdes satisfait aux conditions (i)-(iii) du Théorème 5. Ainsi $k[\Delta]$ est Cohen-Macaulay pour tous les complexes $\Delta$ qui sont des matroïdes. Si $\Delta$ est un matroïde tous ses sous-complexes pleins pleins $\Delta'$ sont des matroïdes et ont un anneau des faces Cohen-Macaulay. $\diamond$

**Exemple:** Considérons le complexe simplicial suivant: Soit $\mathcal{V}(\Delta) = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$ avec les faces $\{v_1\}, \{v_2\}, \ldots, \{v_5\}$; $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_1\}$. (La réalisation géometrique de $\Delta$ sera un péntagone.)

En utilisant le théorème de Reisner on peut se convaincre facilement, que $k[\Delta]$ est Cohen-Macaulay. Pourtant $\Delta$ n'est pas un matroïde, car par exemple les faces $\{v_1\}$ et $\{v_3, v_4\}$ ne satisfont pas à l'axiome (III.). Ainsi la classe $\mathcal{CM}$ est plus grande que la classe des complexes simpliciaux qui sont des matroïdes. D'après le Théorème 6 le complexe $\Delta$ doit avoir un sous-complexe plein $\Delta'$ pour lequel $k[\Delta']$ n'est pas Cohen-Macaulay. En effet, le sous-complexe plein ayant comme ensemble des sommets $\{v_1, v_3, v_4\}$ est tel, car ses faces maximales ont des dimensions différentes. $\diamond$

**Remarque 5:** Soit $\mathcal{M}$ un matroïde fini quelconque sur l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Définissons l'anneau $k[\mathcal{M}]$ de la manière suivante: associons à chaque élément $v_i$ une variable $x_i$. L'anneau $k[\mathcal{M}]$ sera le quotient de $k[x_1, \ldots, x_n]$ par l'idéal

$$I(\mathcal{M}) = (x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} \mid \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \text{ est un cycle}).$$

On pourrait appeler $I(\mathcal{M})$ *l'idéal des cycles.* Rappelons qu'un cycle est un sous-ensemble minimal dépendant. Le sous-matroïde obtenu par omission des lacets est un complexe simplicial fini, dont l'anneau des faces est évidemment isomorphe à $k[\mathcal{M}]$, car l'image des variables associés aux lacets est contenue dans $I(\mathcal{M})$. Donc selon le Théorème 6 l'anneau $k[\mathcal{M}]$ est Cohen-Macaulay. $\diamond$

## 2. La caractéristique d'Euler des matroïdes

**Définition 10:** Notons le nombre des indépendants de cardinalité $k$ d'un matroïde $\mathcal{M}$ par $i_k(\mathcal{M})$. Appelons *la caractéristique d'Euler de $\mathcal{M}$* le nombre entier

$$\chi(\mathcal{M}) = \sum_{k=0}^{r(\mathcal{M})} (-1)^k i_k$$

où $r(\mathcal{M})$ désigne le rang de $\mathcal{M}$. $\diamond$

**Corollaire 4:**

$$\chi(\mathcal{M}) = (-1)^{r(\mathcal{M})} \cdot \dim_k H^{r(\mathcal{M})-1}(k, \Delta(\mathcal{M}))$$

où $\Delta(\mathcal{M})$ désigne le complexe simplicial obtenu de $\mathcal{M}$ par omission des lacets.

En effet $\chi(\mathcal{M})$ est $(-1)$ fois la caractéristique d'Euler du complexe $C^\bullet(k,\Delta(\mathcal{M}))$. La caractéristique d'Euler d'un complexe est égale à celle du complexe des homologies. Enfin selon le Théorème 6 la caractéristique d'Euler de $H^\bullet(k,\Delta(\mathcal{M}))$ est $(-1)^{r(\mathcal{M})-1} \cdot \dim_k H^{r(\mathcal{M})-1}(k,\Delta(\mathcal{M}))$. ◇

Le lemme suivant sera très utile pour les démonstrations par induction:

**Lemme 4:** *On a la formule*

$$\chi(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{M}\setminus e) - \chi(\mathcal{M}/e)$$

*pour tout $e \in M$. ($\mathcal{M}\setminus e$ désigne le sous-matroïde obtenu par omission de $e$, et $\mathcal{M}/e$ est la contraction de $\mathcal{M}$ par $e$.)*

*Preuve:* On peut classer les indépendants de cardinalité $k$ en deux classes disjoints selon celà, s'ils contiennent $e$ ou non. Ceci implique

$$i_k(\mathcal{M}) = i_k(\mathcal{M}\setminus e) + i_{k-1}(\mathcal{M}/e),$$

d'où on obtient la formule énoncée après multiplication par $(-1)^k$ et sommation en $k$. ◇

Ce lemme nous permet de déterminer les matroïdes dont la caractéristique d'Euler est zéro.

**Proposition 5:** $\chi(\mathcal{M}) = 0$ *si et seulement si $\mathcal{M}$ contient un pont.*

Nous rappelons qu'un pont est un élément contenu dans tous les indépendants maximaux.

*Preuve:* Supposons d'abord que $p$ est un pont de $\mathcal{M}$. Alors les matroïdes $\mathcal{M}\setminus p$ et $\mathcal{M}/p$ sont identiques, d'où on a $\chi(\mathcal{M}\setminus p) = \chi(\mathcal{M}/p)$, et selon le Lemme 4 on a $\chi(\mathcal{M}) = 0$.

Nous allons démontrer l'implication inverse par induction sur $|M|$. Pour $|M| = 0$, c.à.d. que $\mathcal{M} = \emptyset$ on a $\chi(\mathcal{M}) = 1 \neq 0$, donc la proposition est vraie. Supposons que la proposition est vraie pour tous les matroïdes de cardinalité inférieure à $|M|$ et que $\chi(\mathcal{M}) = 0$. Dans ce cas $\mathcal{M}$ contient d'autres indépendants que $\emptyset$, en particulier il contient un élément $e$ qui n'est pas un lacet. On peut supposer qu'il n'est pas non plus un pont , sinon nous avons terminé. Alors $r(\mathcal{M})\setminus e = r(\mathcal{M})$ car il existe un indépendant maximal de $\mathcal{M}$, qui ne contient pas $e$, et qui est donc aussi un indépendant maximal de $\mathcal{M})\setminus e$ . De même on a $r(\mathcal{M}/e) = r(\mathcal{M}) - 1$, car $e$ n'est pas un lacet. Selon le Corollaire 4 le signe de $\chi(\mathcal{M}\setminus e)$ est soit $(-1)^{r(\mathcal{M})}$ soit zéro, et la même chose est vraie pour le signe de $\chi(\mathcal{M}/e)$. Donc on a

$$\chi(\mathcal{M}\setminus e) = \chi(\mathcal{M}/e) = 0,$$

d'où selon l'hypothèse de l'induction $\mathcal{M}/e$ contient un pont $p$. Pour finir,il suffit de montrer le lemme suivant:

**Lemme 5:** *Si $e$ n'est pas un lacet de $\mathcal{M}$ et si $p$ est un pont dans $\mathcal{M}/e$ alors $p$ est un pont dans $\mathcal{M}$.*

*Preuve:* Supposons le contraire. Si $p$ n'est pas un pont dans $\mathcal{M}$ alors il existe une base $B$ (c.à.d. indépendant maximal) de $\mathcal{M}$ qui ne le contient pas. L'ensemble $\{e\}\cup B$ est de rang maximal dans $\mathcal{M}$ et –étant donné que $e$ n'est pas un lacet– on peut étendre $\{e\}$ à un ensemble $B'$ maximal indépendant dans $\{e\}\cup B$ et ainsi dans $\mathcal{M}$ aussi. Alors $B'$ est une base de $\mathcal{M}$, contenant $e$ et $B'\setminus\{e\}$ est une base de $\mathcal{M}/e$, ne contenant pas $p$. Ceci contredit la supposition que $p$ serait un pont dans $\mathcal{M}/e$. ◇◇



Maintenant nous sommes en mesure de caractériser tous les matroïdes satisfaisant à $|\chi(\mathcal{M})| = 1$:

**Proposition 6:** $|\chi(\mathcal{M})| = 1$ *si et seulement si les cycles de $\mathcal{M}$ sont disjoints et $M$ ne contient pas de ponts.*

*Preuve:* Montrons d'abord la nécessité, que les cycles soient disjoints. Cherchons un $\mathcal{M}$ contre-exemple minimal. Selon l'hypothèse il existe deux cycles $-C_1$ et $C_2$ – dont l'intersection contient un élément $e$. (Donc $e$ n'est pas un lacet.) $e$ n'est pas un pont car $\chi(\mathcal{M})$ n'est pas nul. À cause du Lemme 4 et du Corollaire 4 nous avons

$$|\chi(\mathcal{M})| = |\chi(\mathcal{M}\setminus e)| + |\chi(\mathcal{M}/e)|$$

et ainsi l'un de deux matroïdes $\mathcal{M}\setminus e$ et $\mathcal{M}/e$ contient un pont. Ce n'est pas $\mathcal{M}/e$ qui contient un pont, car autrement $\mathcal{M}$ aurait la même propriété selon le Lemme 5, et on aurait $\chi(\mathcal{M}) = 0$. Donc $|\chi(\mathcal{M}/e)| = 1$, et $\mathcal{M}\setminus e$ contient un pont $p$. Ce dernier n'est pas un pont dans $\mathcal{M}$ alors il existe un cycle $C$ qui le contient, et qui contient $e$ également car dans $\mathcal{M}\setminus e$ aucun cycle ne passe plus à travers $p$. (Il est facile de vérifier qu'un élément est un pont si et seulement si aucun cycle ne le contient.) On peut supposer qu'on a choisi $C = C_1$. Étant donné que $C_1\setminus\{e\}$ est indépendant et $p$ est un pont dans $\mathcal{M}\setminus e$, $C_1\setminus\{e\}$ reste aussi indépendant dans $\mathcal{M}/p$. Alors il existe un sous-ensemble $C_1'$ de $C_1$ qui est un cycle contenant $e$ dans le matroïde $\mathcal{M}/p$. De même il existe un cycle $C_2'$ de $\mathcal{M}/p$ qui est contenu dans $C_2$ et qui passe par $e$. Par les mêmes arguments qu'on a utilisé pour $e$ on peut démontrer $|\chi(\mathcal{M}/p)| = 1$. $\mathcal{M}$ était un contre-exemple minimal donc dans $\mathcal{M}/p$ on peut déduire de $e \in C_1' \cap C_2'$ l'égalité $C_1' = C_2'$. Ainsi $C_1 \cap C_2$ qui contient $C_1' = C_2'$ est dépendant dans $\mathcal{M}/p$ et $C_1 \cap C_2 \cup \{p\}$ est dépendant dans $\mathcal{M}$. L'ensemble $C_1 \cap C_2 \cup \{p\}$ est contenu dans $C_1$ qui est un minimal dépendant, donc on a $C_1 = C_1 \cap C_2 \cup \{p\}$. On en déduit que $C_1 \cup C_2 \setminus \{e\}$ est égal à $C_2 \setminus \{e\} \cup \{p\}$ qui est indépendant, car $C_2 \setminus \{e\}$ est indépendant et $p$ est un pont dans $\mathcal{M}\setminus e$. Ainsi le rang de $C_1 \cup C_2$ est au moins $|C_1 \cup C_2| - 1$. Mais dans ce cas là il existe un indépendant $I$ contenant $e$ dans $C_1 \cup C_2$ qui est de cardinalité $|C_1 \cup C_2| - 1$. Ceci est une contradiction car un $I$ contiendrait soit $C_1$ soit $C_2$ entièrement et un indépendant ne peut pas contenir un dépendant.

Montrons maintenant l'implication inverse par induction sur $|M|$. Pour $\mathcal{M} = \emptyset$ l'énoncé est vrai.Si $\mathcal{M}$ ne contient que des lacets, on voit directement $\chi(\mathcal{M}) = 1$. Si $e$ n'est pas un lacet alors il est contenu dans un circle $C$ qui est disjoint des autres cycles. Ainsi les éléments de $C\setminus\{e\}$ seront des ponts dans $\mathcal{M}\setminus e$. Donc on aura $\chi(\mathcal{M}\setminus e) = 0$. Les cycles de $\mathcal{M}/e$ seront $C\setminus\{e\}$ et les cycles de $\mathcal{M}$ différents de $C$. Ainsi on peut appliquer l'hypothèse de l'induction à $\mathcal{M}/e$, et finir la démonstration à l'aide du Lemme 4. ◇

## 3. Les matroïdes dont l'anneau des faces est Gorenstein

Le paragraphe précédent nous servira à déterminer les matroïdes dont l'anneau des faces est Gorenstein. Pour faire ceci nous appliquerons Proposition 5.4 de [3]. (Nous nous sommes permis de corriger une faute de frappe dans l'énoncé)

Selon cette proposition $k[\Delta]$ est Gorenstein si et seulement si on a

$$\bigoplus_{-1\le q\le d,\ T\subset\mathcal{V},\ |T|=d-q} H^q(\Delta/T) \cong k.$$

$\Delta/T$ désigne le sous-complexe plein dont l'ensemble des sommets est $\mathcal{V} \setminus T$.

À l'aide de ce résultat nous trouvons

**Théorème 7:** *$k[\mathcal{M}]$ est Gorenstein si est seulement si les cycles de $\mathcal{M}$ sont disjoints.*

*Preuve:* Selon la proposition citée ci-dessus $k[\mathcal{M}]$ est Gorenstein si est seulement si on a

$$\bigoplus_{-1 \leq q \leq d,\ T \subset \mathcal{V}(\Delta(\mathcal{M})),\ |T| = d-q} H^q(\mathcal{M} \setminus T) \cong k$$

où $d = r(\mathcal{M}) - 1$ et $\Delta(\mathcal{M})$ est le complexe simplicial obtenu par omission des lacets.($r(\mathcal{M})$ désigne le rang de $\mathcal{M}$.) Évidemment on a

$$\dim \Delta(\mathcal{M} \setminus T) \geq d - (d-q) = q$$

et égalité si et seulement si $T$ est contenu dans toutes les faces maximales, i.e. $T$ se compose des ponts. En cas de non-égalité selon le Théorème 6 on a $H^q(\mathcal{M} \setminus T) = 0$. En outre si $\mathcal{M} \setminus T$ contient un pont alors d'après la Proposition 5 et le Corollaire 4, on a $H^q(\mathcal{M} \setminus T) = 0$. Donc le seul $T$ pour lequel $H^q(\mathcal{M} \setminus T)$ peut être différent de zéro est l'ensemble $P$ des ponts de $\mathcal{M}$. La cardinalité de $P$ est entre zéro et $r(\mathcal{M}) = d + 1$, donc il se figure entre les $k$-espaces vectoriels de la somme directe ci-dessus. Donc on a obtenu que $k[\mathcal{M}]$ est Gorenstein si et seulement si $|\chi(\tilde{\mathcal{M}} \setminus P)| = 1$. Selon la Proposition 6 ceci est vrai si et seulement si $\mathcal{M} \setminus P$ a des cycles disjoints et ne contient pas de pont. Comme il résulte directement de la définition des ponts, un pont de $\mathcal{M} \setminus P$ serait aussi un pont de $\mathcal{M}$ non contenu dans $P$ ce qui est impossible. Donc il est nécessaire et suffisant que les cycles de $\mathcal{M} \setminus P$ soient disjoints. Mais les cycles de $\mathcal{M} \setminus P$ sont exactement les mêmes que ceux de $\mathcal{M}$, car aucun cycle ne contient un pont, d'où on a le théorème. ◇

## REFERENCES:


[1] Matsumura: Commutative ring theory, Theorem 16.8
Cambridge University Press 1986, page 131.

[2] G.A.Reisner: Cohen-Macaulay Quotients of Polynomial Rings
Advances in Mathematics 21,30-49 (1976)

[3] M. Hochster: Cohen-Macaulay Rings, Combinatorics, and Simplicial Complexes
Proc. Oklahoma Ring Theory Conference, 1976, p. 171-223.